CLASE 10. Funciones Complejas

Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ un conjunto no vacío. Consideremos una función $w = f(z), f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que asigna a cada elemento $z \in \mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ es el dominio de definición de f) un único elemento $w \in \mathbb{C}$. El rango de f es el conjunto de todas las imágenes, a través de f, de los elementos de $\mathcal{D}$.

Se dirá que dos funciones $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $g : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son iguales si $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \mathcal{D}$ (además de cumplirse que $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$).

Para cada $z \in \mathcal{D}$ el valor $f(z)$ de f en z es un número complejo y podemos escribir (usando la forma binómica de los números complejos) que $f(z) = u(z) + iv(z)$, donde $u : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $v : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones reales. Como, a su vez, $z \in \mathbb{C}$, entonces podemos escribir $z = x + iy = (x, y)$, de donde, al sustituir en f obtenemos $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. A la función (escalar, de dos variables reales) $u(x, y)$ la llamamos la parte real de f, mientras que a (la función escalar, de dos variables reales) $v(x, y)$ la llamamos la parte imaginaria de f. Recíprocamente, dada $w = u(x, y) + iv(x, y)$, entonces la sustitución $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ y $y = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$ (propiedades (e) y (f), respectivamente) en $u(x, y)$ y $v(x, y)$ nos permite obtener la f original, expresada como una función de z, $w = f(z)$.

Ejemplo 10.1. Para la función $f(z) = z^2 + 1$, halle $u(x, y)$ y $v(x, y)$.

Solución. Hacemos $z = x + iy$. Sustituyendo, nos queda

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + iy)^2 + 1 \\ &= x^2 + 2xyi - y^2 + 1 \\ &= (x^2 - y^2 + 1) + i(2xy). \end{aligned}$$

Así, $u(x, y) = (x^2 - y^2 + 1)$ y $v(x, y) = 2xy$.

Recíprocamente, si $w = (x^2 - y^2 + 1) + i(2xy)$, hacemos $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ y $y = \dfrac{z - \bar{z}}{2}$ y sustituimos

$$\begin{aligned} w &= \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 + 1 + i2\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) \\ &= \frac{2z^2 + 2\bar{z}^2}{4} + 1 + \frac{z^2 - \bar{z}^2}{2} \\ &= \frac{2z^2}{2} + 1 = z^2 + 1. \end{aligned}$$

10.1 Sucesiones Complejas

Definición 10.2 (Sucesión Compleja)**.** Si, como es usual, $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales $1, 2, 3, \ldots$, entonces una sucesión de números complejos se define por medio de una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$. Escribiendo $f(1) = z_1$, $f(2) = z_2$, $f(3) = z_3$, $\ldots$, $f(n) = z_n$, $\ldots$ diremos que z_n es el término n-ésimo de la sucesión y, por brevedad, usaremos la notación (z_n) para denotar dicha sucesión. La sucesión (z_n) se dice que converge al número complejo l si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural $N = N(\varepsilon)$ tal que $|z_n - l| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. En tal caso escribiremos $z_n \to l$ o que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = l$.

Las propiedades son similares al caso real:

Teorema 10.3. *i) Si el límite existe, es único.*

ii) La suma o diferencia de dos sucesiones convergentes es convergente. El producto de dos sucesiones convergente es convergente y el cociente de dos sucesiones convergentes es convergente (siempre y cuando la sucesión que está en el denominador no converja a 0). Esto lo expresamos de la siguiente manera: Si $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = l_1$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = l_2$*, entonces*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} [z_n \pm w_n] = l_1 \pm l_2$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n w_n = l_1 l_2$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{w_n} = \dfrac{l_1}{l_2} \quad (l_2 \neq 0)$.

iii) Si (z_n) *es una sucesión convergente, entonces es acotada (Se dice que una sucesión* (z_n) *es acotada si existe una constante* $K > 0$ *tal que* $|z_n| < K$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*).*

iv) Consideremos una sucesión (z_n) *donde* $z_n = x_n + iy_n$*,* $n \in \mathbb{N}$*. La sucesión* (z_n) *converge al límite* $l = x_0 + iy_0$ *si y sólo si* $x_n \to x_0$ *y* $y_n \to y_0$*. Es decir, la convergencia de la sucesión* (z_n) *es equivalente a la convergencia de las dos sucesiones reales* $(x_n) = (\mathrm{Re}(z_n))$ *y* $(y_n) = (\mathrm{Im}(z_n))$*.*

Diremos que la sucesión de números complejos (z_n) diverge al límite ∞, lo cual escribiremos $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ (o también $z_n \to \infty$), si para cualquier número real $k > 0$, existe un número natural N tal que $|z_n| > k$ para todo $n > N$.

Geométricamente, ésta definición corresponde a la siguiente afirmación: dado cualquier círculo con centro en $z_0 = 0$, todos los puntos z_n de la sucesión, a partir de un número natural n suficientemente grande, están en el exterior de este círculo.

10.2 Series Numéricas de Números Complejos

Definición 10.4 (Series Numéricas de Números Complejos)**.** Dada (z_n) una sucesión de números complejos, formamos la sucesión de sumas parciales $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$, definidas por

$$\begin{aligned}
S_1 &= z_1 \\
S_2 &= z_1 + z_2 = S_1 + z_2 \\
S_3 &= z_1 + z_2 + z_3 = S_2 + z_3 \\
&\vdots \\
S_n &= z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n = S_{n-1} + z_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

La sucesión (S_n) de sumas parciales determina una serie de números complejos y al límite de (S_n) lo representaremos por el símbolo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Si la sucesión (S_n) es convergente se dirá que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente. En tal caso, si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = S$, llamaremos a S la suma de la serie y escribiremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S.$$

La serie se dice divergente si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ o si dicho límite no existe.

Algunas propiedades:

a) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge a la suma S $\left(\text{es decir, } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S\right)$ si y sólo si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(S)$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(S)$.

b) Como sucede en el caso real, si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ y $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = T$ son dos series convergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} [z_n \pm w_n] = S \pm T$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot z_n = c \cdot S$, para cualquier c constante.

c) Criterio de Cauchy: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural $N = N(\varepsilon)$ tal que $|S_n - S_m| = |z_{m+1} + z_{m+2} + \cdots + z_n| < \varepsilon$, para todos m, n naturales tales que $n > m > N$.

d) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge entonces $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es convergente.

e) Si una serie de números complejos converge absolutamente, entonces también converge.

f) Sean $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ dos series complejas. Si $|z_n| \leq |w_n|$, para todo $n > N_0$ (siendo N_0 cierto número positivo) y si $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.

g) Supongamos que (z_n) es una sucesión de números complejos y que $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = L$ (o que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$). Si $L < 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente. Si $L > 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es divergente.

10.3 Límite de Funciones Complejas

Consideremos una función compleja f, definida en un conjunto (no necesariamiento abierto) $\mathcal{D}$ de $\mathbb{C}$, $f\colon \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, y sea z_0 un punto de $\mathcal{D}$ o de la frontera de $\mathcal{D}$ ($z_0 \in \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$).

Definición 10.5 (Límite de Funciones)**.** Se dice que el límite de la función f en el punto z_0 es l (lo cual escribiremos $\lim_{z\to z_0} f(z) = l$) si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $0 < \delta = \delta(\varepsilon)$ tal que $z \in \mathcal{D}$ y $0 < |z - z_0| < \delta$ implican que $|f(z) - l| < \varepsilon$.

Si no existe l con esta propiedad diremos que el límite no existe.

Las propiedades de límites de funciones complejas coinciden con las del caso real:

a) Si el límite de f existe, es único.

b) Supongamos que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = l_1$ y $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = l_2$. Entonces:

   i) $\lim\limits_{z\to z_0} [f(z) \pm g(z)] = l_1 \pm l_2$.

   ii) $\lim\limits_{z\to z_0} [f(z)g(z)] = l_1 l_2$.

   iii) $\lim\limits_{z\to z_0} kf(z) = k\,l_1$, para cualquier constante (compleja) k.

   iv) $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{l_1}{l_2}$, siempre que $l_2 \neq 0$.

c) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = l$ si y sólo si $\lim\limits_{z\to z_0} \mathrm{Re}\,(f) = \mathrm{Re}\,(l)$ y $\lim\limits_{z\to z_0} \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(l)$ (note que cada uno de éstos dos últimos límites puede verse como un límite de funciones escalares de dos variables reales).

Una función p definida por $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, siendo $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ números complejos y $a_n \neq 0$, será llamada un polinomio de grado n.

Si $p(z)$ y $q(z)$ son polinomios, la función $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ se dice una función algebraica racional.

10.4 Continuidad de Funciones Complejas

Definición 10.6 (Continuidad de una función compleja)**.** Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y sea $z_0 \in \mathcal{D}$. Se dice que f es continua en z_0 si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Observemos que en esta definición, como en el caso real, se tienen tres condiciones: está definido $f(z_0)$, existe $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ y son iguales el límite y el valor de la función en el punto.

La función f se dice continua en un conjunto $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ si y sólo si f es continua en cada punto de $\mathcal{E}$. Igual que en el caso real, se cumplen las siguientes propiedades referidas a continuidad (siendo éstas consecuencias de los teoremas sobre las propiedades de los límites):

a) Sean f y g funciones complejas definidas en $\mathcal{D}$, continuas en un punto $z_0 \in \mathcal{D}$. Entonces:

   i) $f \pm g$ es continua en z_0.

   ii) kf es continua en z_0, siendo k cualquier constante (compleja).

   iii) $f \cdot g$ es continua en z_0.

iv) $\dfrac{f}{g}$ es continua en z_0, siempre que $g(z_0) \neq 0$.

b) Sean f y g funciones complejas, $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $g : \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, tales que $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{U}$. Si f es continua en $z_0 \in \mathcal{D}$ y si g es continua en $f(z_0)$, entonces la función compuesta $g \circ f$ es continua en z_0.

Ejemplo 10.7. Demuestre que $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{z}{\bar{z}}$ no existe.

Solución. Escribimos $z = x + iy$. Así $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+iy}{x-iy}$. Tomando límites iterados encontramos que

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x+iy}{x-iy} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x+iy}{x-iy} = \lim_{y\to 0} \frac{iy}{-iy} = -1.$$

Luego, no existe el límite (gracias a la Propiedad (a)).

Ejemplo 10.8. Estudie la convergencia absoluta de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$.

Solución. Aplicando el criterio del cociente,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

así que el Criterio del Cociente no decide.

Escribimos $z_n = x_n + iy_n$ donde $z_n = \dfrac{i^n}{n}$. Separando parte real y parte imaginaria, se obtienen las dos series reales

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1},$$

las cuales son series alternantes convergentes (Leibniz, Matemáticas 4), y así la serie de partida es convergente. Como $\left|\dfrac{i^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$ y la serie real $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ no converge absolutamente.